

Задание

Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$$

Решение.

Имеем степенной ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n, \quad \text{где } c_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}, \quad a = 2$$

Находим радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\sqrt{n+2}}{n\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} =$$

Под знаком корня при $n \rightarrow \infty$ имеем неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель на n

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = (1+0) \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

Тогда интервал сходимости ряда $(a-R; a+R)$ будет равен $(1; 3)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x = 1$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2)^n}{n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$$

Это знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница, поскольку последовательность $\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ является монотонно убывающей и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} = 0$$

При $x = 3$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

Этот ряд сходится по предельному признаку сравнения со сходящимся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad \alpha = \frac{3}{2} < 1,$$

Найдем при $n \rightarrow \infty$ предел отношения общих членов двух рядов

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

Вычисляем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \sqrt{1+0} = 1$$

Получено конечное значение, следовательно, согласно предельного признака сравнения, оба ряда сходятся одновременно.

Таким образом, область сходимости исходного ряда равна $[1; 3]$.