

Задание

Решить задачу оптимизации симплекс-методом

$$f = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 \leq 5 \\ x_2 + x_5 \geq -3 \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

Решение.

Перейдем к каноническому виду системы ограничений задачи. Умножаем первое уравнение на минус единицу. Поскольку все переменные $x_j \geq 0$, заменяем четвертое ограничение эквивалентным $x_2 + x_5 \geq 0$.

Получаем

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 \leq 5 \\ x_2 + x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Вводим дополнительные переменные $x_6 \geq 0$ и $x_7 \geq 0$ для получения равенств в третьем и четвертом ограничении

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_2 + x_5 - x_7 = 0 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1...7}. \end{cases}$$

Теперь система ограничений, вообще говоря, не имеет предпочтительного вида. Вводим искусственный базис путем перехода к М-задаче. Для этого к первому и четвертому уравнению прибавим искусственные неотрицательные переменные w_1 и w_2 . Тогда базисными переменными будут w_1, x_3, x_6 и w_2 — они входят только в одно уравнение с коэффициентом, равным единице.

Поскольку решается задача на минимум, к целевой функции прибавим сумму искусственных переменных, умноженных на сколь угодно большое положительное число М. Таким образом, получаем так называемую М-задачу

$$f^* = w_1 + w_2 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_4 + w_1 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_2 + x_5 - x_7 + w_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, i = 1 \dots 5, w_1 \geq 0, w_2 \geq 0. \quad (3)$$

Выражаем w_1 и w_2 через свободные переменные

$$w_1 = 3 + x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$w_2 = -x_2 - x_5 + x_7$$

Подставляя w_1 и w_2 в выражение для функции f^* , окончательно получаем

$$f^* = 3 + x_1 - 3x_2 + x_4 - x_5 + x_7 \rightarrow \min$$

В целевой функции f убираем базисную переменную.

$$f = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 = x_1 + x_2 - (2 + 2x_4) - 2x_5 = -2 + x_1 + x_2 - 2x_4 - 2x_5$$

Заносим полученную задачу в симплексную таблицу

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные				
		x_1	x_2	x_4	x_5	x_7
w_1	3	-1	2	-1	0	0
x_3	2	0	0	-2	0	0
x_6	5	0	3	-1	1	0
w_2	0	0	1	0	1	-1
f	-2	-1	-1	2	2	0
f^*	3	-1	3	-1	1	-1

Найдем решение М-задачи, пересчитывая симплексную таблицу по известным правилам.

Для задачи минимизации условием оптимальности опорного плана является неположительность оценок функции f^* . В данном случае две оценки в последней строке положительны. Наибольшая из них по абсолютной величине соответствует столбцу переменной x_2 . Этот столбец и назовем разрешающим.

Для определения разрешающей строки находим минимальное симплексное отношение

$$\min \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{0}{1} \right\} = \frac{0}{1}$$

Оно соответствует четвертой строке, которая и будет разрешающей. Следовательно, элемент a_{42} - разрешающий, в таблице он выделен рамкой. Переменную w_2 выведем из базиса, а переменную x_2 введем в базис, пересчитав элементы таблицы. После пересчета таблица примет вид

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные				
		x_1	w_2	x_4	x_5	x_7
w_1	3	-1	-2	-1	-2	2
x_3	2	0	0	-2	0	0
x_6	5	0	-3	-1	-2	3
x_2	0	0	1	0	1	-1
f	-2	-1	1	2	3	-1
f^*	3	-1	-3	-1	-2	2

Продолжаем пересчет аналогичным образом

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные				
		x_1	w_2	x_4	x_5	w_1
x_7	1.5	-0.5	-1	-0.5	-1	0.5
x_3	2	0	0	-2	0	0
x_6	0.5	1.5	0	0.5	1	-1.5
x_2	1.5	-0.5	0	-0.5	0	0.5
f	-0.5	-1.5	0	1.5	2	0.5
f^*	0	0	-1	0	0	-1

Все оценки целевой функции неположительные, следовательно, получено оптимальное решение М-задачи. В оптимальном решении обе искусственные переменные w_1 и w_2 равны нулю. Из этого следует, что система ограничений исходной задачи совместна, то есть задача имеет решение, а в последней симплексной таблице получен опорный план исходной задачи.

Удалив ненужные столбцы с w_1 и w_2 и последнюю строку, переписываем симплексную таблицу в виде

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные		
		x_1	x_4	x_5
x_7	1.5	-0.5	-0.5	-1
x_3	2	0	-2	0
x_6	0.5	1.5	0.5	1
x_2	1.5	-0.5	-0.5	0
f	-0.5	-1.5	1.5	2

Оценки целевой функции f (1.5 и 2) положительны, следовательно, опорный план не оптимален. Продолжаем пересчет симплексной таблицы

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные		
		x_1	x_4	x_6
x_7	1.5	-0.5	-0.5	-1
x_3	2	0	-2	0
x_5	0.5	1.5	0.5	1
x_2	1.5	-0.5	-0.5	0
f	-0.5	-1.5	1.5	2

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные		
		x_1	x_5	x_6
x_7	2	1	0	1
x_3	4	6	4	4
x_4	1	3	2	2
x_2	2	1	1	1
f	-2	-6	-1	-3

Теперь все оценки целевой функции f неположительны, значит имеем оптимальный план исходной задачи, который записываем, приравнявая свободные переменные к нулю

$$X_{\text{опт}}^* = (0; 2; 4; 1; 0)$$

При этом имеем минимальное значение целевой функции

$$f_{\min} = x_1^* + x_2^* - x_3^* - 2x_5^* = 0 + 2 - 4 - 2 \cdot 0 = -2.$$

Поскольку нет нулевых оценок, полученное решение единственное.