

Задание

Найти производные данных функций.

$$a) y = \ln(x^2 + 5x), \quad б) y = \frac{\log_3(4x + 5)}{2\operatorname{ctg} \sqrt{x}};$$

$$в) 3 \sin y - xy^2 - 5 = 0; \quad г) x(t) = 4t - t^2, y(t) = t \sin t.$$

Решение.

$$a) y' = (\ln(x^2 + 5x))' =$$

Имеем производную сложной функции вида

$$(\ln U)' = \frac{1}{U} \cdot U', \text{ где } U = x^2 + 5x$$

Вычисляем

$$= \frac{1}{x^2 + 5x} \cdot (x^2 + 5x)' =$$

Производная суммы функций $(U + V)' = U' + V'$. Постоянный множитель, число 5, выносим за знак производной.

$$= \frac{1}{x^2 + 5x} \cdot ((x^2)' + 5x') =$$

Теперь имеем табличные производные элементарных функций вида $(x^a)' = ax^{a-1}$. Записываем их значения, окончательно получая

$$= \frac{2x + 5}{x^2 + 5x}.$$

$$б) y' = \left(\frac{\log_3(4x + 5)}{2\operatorname{ctg} \sqrt{x}} \right)' =$$

Производная частного функций $\left(\frac{U}{V} \right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$. Находим

$$= \frac{(\log_3(4x + 5))' \cdot 2\operatorname{ctg} \sqrt{x} - \log_3(4x + 5)(2\operatorname{ctg} \sqrt{x})'}{(2\operatorname{ctg} \sqrt{x})^2} =$$

Получили производные сложных функций вида

$$(\log_a U)' = \frac{1}{U \ln a} \cdot U', \text{ где } U = 4x + 5, \quad (\operatorname{ctg} U)' = -\frac{1}{\sin^2 U} \cdot U', \text{ где } U = \sqrt{x}$$

Вычисляем

$$= \frac{\frac{1}{(4x + 5) \ln 3} (4x + 5)' \operatorname{ctg} \sqrt{x} - \log_3(4x + 5) \left(-\frac{1}{\sin^2 \sqrt{x}} \right) (\sqrt{x})'}{2\operatorname{ctg}^2 \sqrt{x}} =$$

С учетом

$$(4x + 5)' = 4x' + (5)' = 4 + 0 = 4, \quad (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

имеем

$$= \frac{\frac{4\operatorname{ctg} \sqrt{x}}{(4x + 5) \ln 3} + \frac{\log_3(4x + 5)}{\sin^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\operatorname{ctg}^2 \sqrt{x}}.$$

е) Дифференцируем равенство с учетом $y = y(x)$

$$(3 \sin y - xy^2 - 5)' = (0)' \quad \Rightarrow \quad 3(\sin y)' - (xy^2)' = 0$$

Первая производная - производная сложной функции вида $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$, где $U = y$. Вторую производную рассматриваем как производную произведения функций $(U \cdot V)' = U'V + UV'$. Тогда можем записать

$$3 \cos(y) \cdot y' - (x)'y^2 - x(y^2)' = 0$$

$$3 \cos(y) \cdot y' - y^2 - x \cdot 2y \cdot y' = 0$$

Выделяем производную y' из полученного уравнения

$$y' = \frac{y^2}{3 \cos y - 2xy}.$$

з) Функция $y(x)$ задана параметрически. Находим производные функций $x(t)$ и $y(t)$

$$x'_t = (4t - t^2)' = 4 - 2t$$

$$y'_t = (t \sin t)' = t' \sin t + t(\sin t)' = \sin t + t \cos t$$

Тогда производная первого порядка функции $y(x)$ равна

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t + t \cos t}{4 - 2t}.$$