

Задача

Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}, \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x^3 - 9}{2x + 3x^4}, \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 3x + \sin 5x}, \quad г) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{4+2x} \right)^{2-x}.$$

Решение.

а) При $x \rightarrow -1$ имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Выделим в числителе и знаменателе множитель $(x+1)$. В знаменателе для этого воспользуемся тождеством

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Получаем

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2 - x + 1} =$$

Знаменатель дроби при $x \rightarrow -1$ не равен нулю, следовательно, в точке $x = -1$ полученная функция непрерывна. Вычисляем ее значение в этой точке

$$= \frac{-1-2}{1-(-1)+1} = -1.$$

б) При $x \rightarrow \infty$ имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x^3 - 9}{2x + 3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{9}{x^4}}{\frac{2}{x^3} + 3} = \frac{2+0-0}{0+3} = \frac{2}{3}.$$

в) При $x \rightarrow 0$ имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Преобразуем тригонометрическое выражение к первому "замечательному" пределу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

В знаменателе дроби используем тригонометрическое тождество

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 3x + \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{2 \sin 4x \cdot \cos x} = \frac{7}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{7}{8} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = \frac{7}{8}.$$

г) При $x \rightarrow \infty$ имеем неопределенность 1^∞ . Приведем выражение ко второму "замечательному" пределу

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{4+2x} \right)^{2-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4-3}{2x+4} \right)^{2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{2x+4} \right)^{2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[1 + \frac{-3}{2x+4} \right]^{\frac{2x+4}{-3}} \right)^{\frac{-3}{2x+4} (2-x)} = \end{aligned}$$

В круглых скобках получен второй "замечательный" предел вида

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e, \text{ где } t = \frac{2x+4}{-3}$$

Находим

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-3(2-x)}{2x+4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3x-6}{2x+4}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-6}{2x+4}}$$

При $x \rightarrow \infty$ имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-6/x}{2+4/x}} = e^{\frac{3-0}{2+0}} = e^{3/2}.$$