

Задание

С помощью двойного интеграла вычислить в полярных координатах площадь плоской фигуры, ограниченной указанными линиями.

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2).$$

Решение.

Для упрощения вычисления интеграла перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

по формуле

$$S = \iint_D dx dy = \iint_G J(\rho, \varphi) d\rho d\varphi, \quad \text{где якобиан } J(\rho, \varphi) = \rho$$

Тогда

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2$$

и уравнение кривой в полярных координатах

$$\rho^6 = 4a^2 \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi (\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi) \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 4a^2 \cos \varphi \sin \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

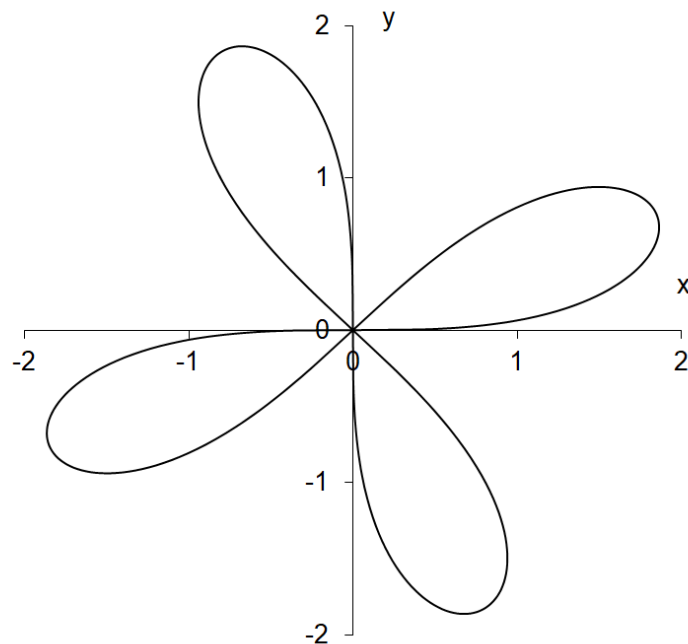
С учетом тригонометрических тождеств

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \quad \sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi$$

упрощаем выражение

$$\rho^2 = 2a^2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi = a^2 \sin 4\varphi$$

Данная линия для $a = 2$ показана на рисунке



С учетом симметрии вычислим площадь одного лепестка и результат умножим на 4.

Область интегрирования для первого лепестка определяется изменением переменной ρ от $\rho = 0$ до $\rho = a\sqrt{\sin 4\varphi}$ и изменением переменной φ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi/4$.

Следовательно, можем записать

$$S = 4 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 4\varphi}} \rho d\rho =$$

Вычислим внутренний интеграл по ρ

$$= 4 \int_0^{\pi/4} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{a\sqrt{\sin 4\varphi}} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/4} a^2 \sin 4\varphi d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \sin 4\varphi d\varphi =$$

Вычисляем интеграл по φ

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/4} \sin 4\varphi d(4\varphi) = -\frac{a^2}{2} \cos 4\varphi \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{a^2}{2} \cos \pi + \frac{a^2}{2} \cos 0 = a^2.$$

Ответ: $S = a^2$.