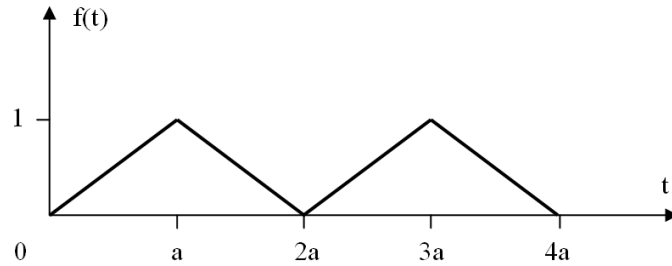


Задание

Найти изображение периодического оригинала



Решение.

Оригинал представляет собой функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x, & 0 \leq x < a, \\ 2 - \frac{1}{a}x, & a \leq x < 2a \end{cases},$$

периодически продолженную на интервал $[0, +\infty)$ с периодом $T = 2a$.

Так как оригинал периодический, то его изображение

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} F_0(p), \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

где $T = 2a$ и

$$F_0(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{a} \int_0^a t e^{-pt} dt + \int_a^{2a} \left(2 - \frac{1}{a}t\right) e^{-pt} dt =$$

Находим интегралы с помощью формулы интегрирования по частям

$$\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU$$

Для первого интеграла имеем

$U = t$	$dU = (t)' dt = dt$
$dV = e^{-pt} dt$	$V = \int e^{-pt} dx = -\frac{1}{p} \int e^{-pt} d(-pt) = -\frac{1}{p} e^{-pt}$

Тогда значение первого интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^a t e^{-pt} dt &= -\frac{1}{p} t e^{-pt} \Big|_0^a + \frac{1}{p} \int_0^a e^{-pt} dt = -\frac{a}{p} e^{-pa} - \frac{1}{p^2} \int_0^a e^{-pt} d(-pt) = \\ &= -\frac{a}{p} e^{-pa} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^a = -\frac{a}{p} e^{-pa} - \frac{1}{p^2} e^{-pa} + \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

Для второго интеграла находим

$U = 2 - \frac{1}{a}t$	$dU = \left(2 - \frac{1}{a}t\right)' dt = -\frac{1}{a} dt$
$dV = e^{-pt} dt$	$V = \int e^{-pt} dx = -\frac{1}{p} \int e^{-pt} d(-pt) = -\frac{1}{p} e^{-pt}$

Тогда значение второго интеграла

$$\begin{aligned}\int_a^{2a} \left(2 - \frac{1}{a}t\right) e^{-pt} dt &= -\frac{2 - \frac{1}{a}t}{p} e^{-pt} \Big|_a^{2a} - \frac{a}{p} \int_a^{2a} e^{-pt} dt = -\frac{2-2}{p} e^{-2pa} + \frac{2-1}{p} e^{-pa} + \frac{a}{p^2} \int_a^{2a} e^{-pt} d(-pt) = \\ &= \frac{1}{p} e^{-pa} + \frac{a}{p^2} e^{-pt} \Big|_a^{2a} = \frac{1}{p} e^{-pa} + \frac{a}{p^2} e^{-2pa} - \frac{a}{p^2} e^{-pa}\end{aligned}$$

Следовательно

$$F_0(p) = \frac{1}{a} \left(-\frac{a}{p} e^{-pa} - \frac{1}{p^2} e^{-pa} + \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{p} e^{-pa} + \frac{a}{p^2} e^{-2pa} - \frac{a}{p^2} e^{-pa} = \frac{1}{ap^2} (a^2 e^{-ap} - 1)(e^{-ap} - 1)$$

Таким образом, изображением $f(t)$ будет функция

$$\begin{aligned}F(p) &= \frac{1}{1 - e^{-2pa}} F_0(p) = \frac{1}{1 - e^{-2pa}} \cdot \frac{1}{ap^2} (a^2 e^{-ap} - 1)(e^{-ap} - 1) = \\ &= -\frac{1}{(1 - e^{-pa})(1 + e^{-pa})} \cdot \frac{1}{ap^2} (a^2 e^{-ap} - 1)(1 - e^{-ap}) = \frac{1 - a^2 e^{-ap}}{ap^2 (1 + e^{-pa})}.\end{aligned}$$