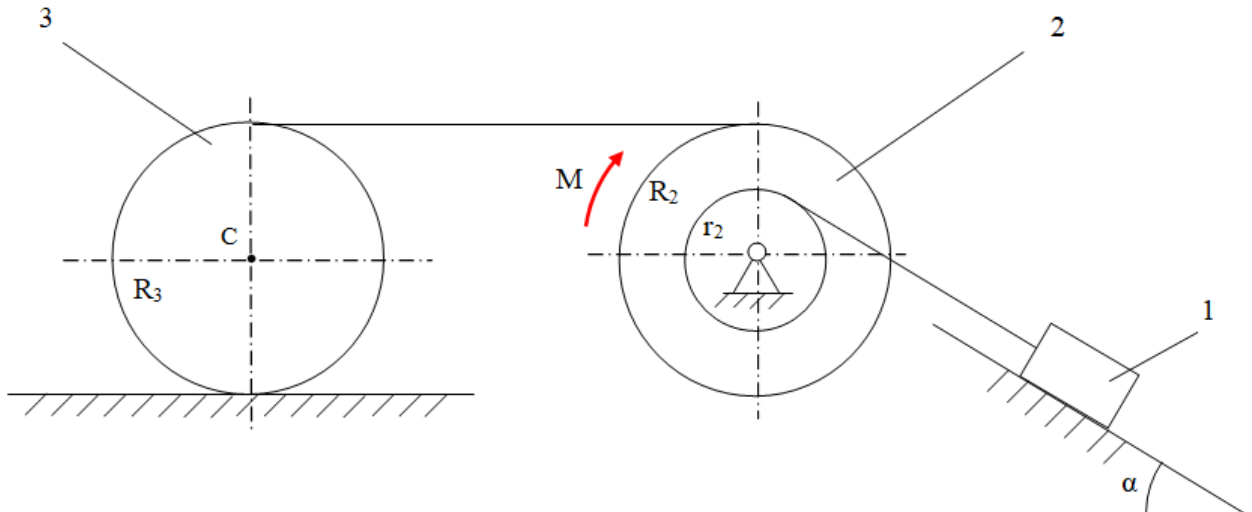


Задание

Механическая система состоит из груза 1 массой m_1 , невесомого шкива 2 массой $m_2 = 0$ с радиусами ступеней R_2, r_2 и катка 3 массой m_3 с радиусом R_3 и радиусом инерции ρ_3 относительно оси, проходящей через точку C . Система приводится в движение под действием силы тяжести и момента M , приложенного к шкиву. Коэффициент трения груза о плоскость - f , коэффициент трения качения - f_k . Определить угловое ускорение шкива ε_2 .



Дано:

$m_1, m_2 = 0, m_3, M, R_2, r_2, R_3, \rho_3, f, f_k$.

Движение под действием силы $m_1 g$ и M .

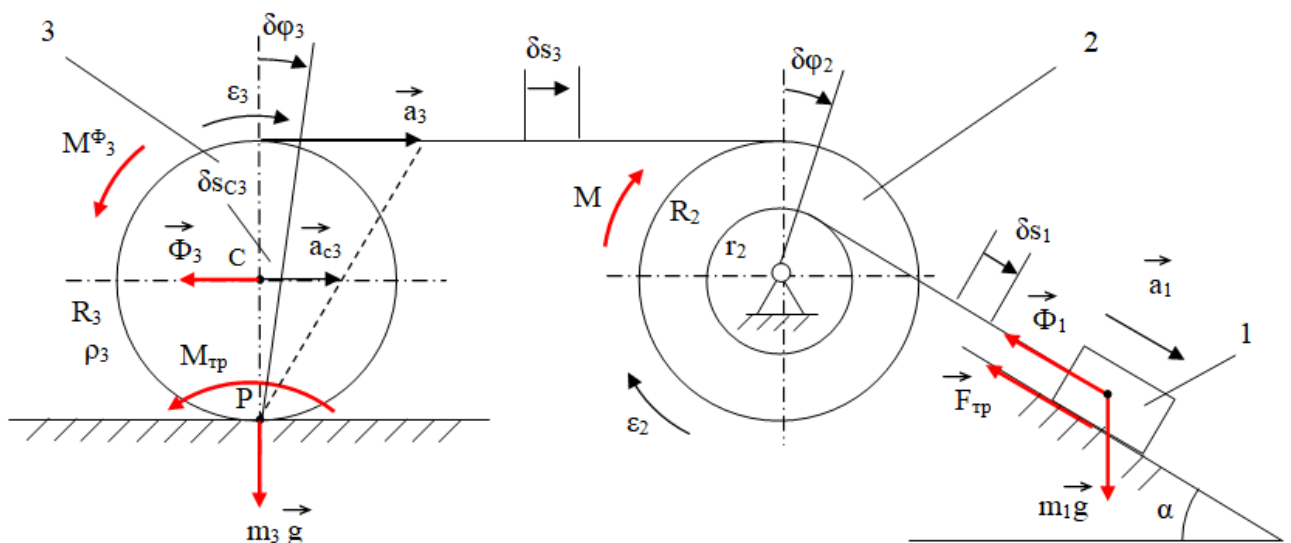
Коэффициент трения f , коэффициент трения качения f_k .

Найти:

ε_2 .

Решение.

Изобразим механическую систему, приложив к телам системы заданные активные силы $m_1 \vec{g}, m_3 \vec{g}$, силу трения $\vec{F}_{тр}$ тела 1, момент сопротивления качению катка 3 $M_{тр}$ и силы инерции.



Груз 1 движется поступательно, его сила инерции $\vec{\Phi}_1 = -m\vec{a}_1$ (величина силы инерции $\Phi_1 = ma_1$). Каток 3 совершает плоскопараллельное движение, силы инерции точек катка приводятся к главному вектору $\vec{\Phi}_3 = -m_3\vec{a}_{C3}$, приложенному к центру катка, и главному моменту сил инерции относительно его центра масс $M_3^\Phi = J_3\varepsilon_3$.

Сообщим грузу 1 перемещение δs_1 . Шкив 2 при том повернется на угол $\delta\varphi_2$, центр масс катка переместится на расстояние δs_{C3} и каток повернется относительно МЦС (точка P) на угол $\delta\varphi_3$.

Применяем общее уравнение динамики

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^\Phi = 0$$

Составим сумму возможных работ активных сил и сил инерции при заданном перемещении

$$-M_{mp}\delta\varphi_3 + M\delta\varphi_2 + m_1g\sin\alpha\delta s_1 - F_{mp}\delta s_1 - M_3^\Phi\delta\varphi_3 - \Phi_3\delta s_{C3} - \Phi_1\delta s_1 = 0$$

Выразим все перемещения через перемещение $\delta\varphi_2$

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_3}{2R_3} = \frac{\delta\varphi_2 R_2}{2R_3}, \quad \delta s_{C3} = \frac{\delta s_3}{2} = \frac{\delta\varphi_2 R_2}{2}, \quad \delta s_1 = \delta\varphi_2 r_2$$

Выразим все ускорения через ускорение ε_2

$$\varepsilon_3 = \frac{a_3}{2R_3} = \frac{R_2}{2R_3}\varepsilon_2, \quad a_{C3} = \frac{a_3}{2} = \frac{\varepsilon_2 R_2}{2}, \quad a_1 = \varepsilon_2 r_2,$$

Тогда

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = m_1 \varepsilon_2 r_2,$$

$$\Phi_3 = m_3 a_{C3} = m_3 \frac{\varepsilon_2 R_2}{2}$$

$$M_3^\Phi = J_3 \varepsilon_3 = m_3 \rho_3^2 \varepsilon_3 = m_3 \rho_3^2 \frac{R_2}{2R_3} \varepsilon_2,$$

где $J_3 = m_3 \rho_3^2$ - момент инерции катка.

Момент сопротивления качению катка 3

$$M_{mp} = f_k m_3 g$$

Сила трения груза 1

$$F_{mp} = f m_1 g \cos \alpha$$

С учетом этого сумма возможных работ

$$\begin{aligned} & -f_k m_3 g \frac{\delta\varphi_2 R_2}{2R_3} + M\delta\varphi_2 + m_1 g \sin \alpha \delta\varphi_2 r_2 - f m_1 g \cos \alpha \delta\varphi_2 r_2 - \\ & - m_3 \rho_3^2 \frac{R_2}{2R_3} \varepsilon_2 \frac{\delta\varphi_2 R_2}{2R_3} - m_3 \frac{\varepsilon_2 R_2}{2} \frac{\delta\varphi_2 R_2}{2} - m_1 \varepsilon_2 r_2 \delta\varphi_2 r_2 = 0 \end{aligned}$$

Так как $\delta\varphi_2 \neq 0$, сокращаем на $\delta\varphi_2$

$$-f_k m_3 g \frac{R_2}{2R_3} + M + m_1 g \sin \alpha r_2 - f m_1 g \cos \alpha r_2 - m_3 \rho_3^2 \frac{R_2}{2R_3} \varepsilon_2 \frac{R_2}{2R_3} - m_3 \frac{\varepsilon_2 R_2}{2} \frac{R_2}{2} - m_1 \varepsilon_2 r_2^2 = 0$$

Выражаем искомое угловое ускорение ε_2 из последнего равенства

$$\begin{aligned} & \left(-m_3 \rho_3^2 \frac{R_2^2}{4R_3^2} - m_3 \frac{R_2^2}{4} - m_1 r_2^2 \right) \varepsilon_2 = f_k m_3 g \frac{R_2}{2R_3} - M - m_1 g \sin \alpha r_2 + f m_1 g \cos \alpha r_2 \\ & \varepsilon_2 = \frac{f_k m_3 g \frac{R_2}{2R_3} - M - m_1 g \sin \alpha r_2 + f m_1 g \cos \alpha r_2}{-m_3 \rho_3^2 \frac{R_2^2}{4R_3^2} - m_3 \frac{R_2^2}{4} - m_1 r_2^2}. \end{aligned}$$