

Задание

Решить дифференциальное уравнение

$$xy'' = y' \ln y', \quad y(1) = e, \quad y'(1) = e.$$

Решение.

Поскольку в уравнении отсутствует функция $y(x)$, можем понизить порядок уравнения на единицу с помощью замены $y'(x) = p(x)$. Тогда $y''(x) = p'(x) = \frac{dp}{dx}$.

Подставляем замену в уравнение

$$x \frac{dp}{dx} = p \ln p$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим уравнение на $xp \ln p$ и умножим на dx

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p \ln p}$$

Имеем уравнение с разделенными переменными. Интегрируем это уравнение

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dp}{p \ln p}$$

Вычисляем интегралы

$$\ln(x) + \ln C_1 = \int \frac{d(\ln p)}{\ln p} = \ln \ln p$$

$$\ln(xC_1) = \ln \ln p$$

$$xC_1 = \ln p$$

Откуда

$$p(x) = e^{xC_1}$$

Находим функцию $y(x)$

$$y(x) = \int p(x) dx = \int e^{xC_1} dx = \frac{1}{C_1} \int e^{xC_1} d(xC_1) = \frac{1}{C_1} e^{xC_1} + C_2$$

Получено общее решение дифференциального уравнения.

Находим частное решение, используя начальное условие

$$y(1) = \frac{1}{C_1} e^{C_1} + C_2 = e$$

$$y'(1) = p(1) = e^{C_1} = e$$

Следовательно

$$C_1 = 1 \quad C_2 = e - \frac{1}{1} e^1 = 0$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = e^x.$$