Задание

В пунктах A_i (i=1…3) производится однородная продукция в количествах a_i единиц. Себестоимость единицы продукции в i-м пункте равна c_i . Готовая продукция поставляется в пункты B_j (j=1…4), потребности которых составляют b_j единиц. Стоимости c_{ij} перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j заданы матрицей $[c_{ij}]_{3x4}$.

a_1	a_2	a_3	c_1	c_2	c_3	b_1	b_2	b_3	b_4
400	300	500	2	3	1	350	250	150	250

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}
2	6	4	7	6	2	7	1	6	10	7	5

Требуется:

1) Методом потенциалов найти план выпуска продукции, при котором минимизируются суммарные затраты по ее изготовлению и доставке потребителям, при обязательном условии, что продукция пункта, в котором себестоимость ее производства наименьшая, распределяется полностью;

2) Вычислить суммарные затраты f_{min} ;

3) Установить пункты, в которых остается нераспределенная продукция, и указать ее объем.

Решение.

1) Заносим условие задачи в таблицу:

Пункты поставки	Пункты потребления				Запасы поставщиков	Себестоимость
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	2	6	4	7	400	2
A_2	6	2	7	1	300	3
A_3	6	10	7	5	500	1
Потребности	350	250	150	250		

Поскольку 350+250+150+250=1000 - суммарная потребность меньше суммарных поставок 400+300+500=1200, данная транспортная задача обладает открытой моделью. Вводим фиктивного потребителя с потребностью 200 единиц. Все тарифы на доставку к фиктивному потребителю равны нулю.

Прибавив себестоимость единицы продукции к матрице стоимости перевозок по строкам, получаем матрицу суммарных затрат по изготовлению и перевозке:

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & 10 & 4 & 0 \\ 7 & 11 & 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

В пункте A_3 себестоимость наименьшая. Для того, чтобы продукция пункта A_3 была полностью распределена, положим затраты по изготовлению и перевозке из этого пункта к фиктивному потребителю равными большому числу

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & 10 & 4 & 0 \\ 7 & 11 & 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Обозначим через x_{ij} количество продукции, перевозимое с i – ой фирмы к j – му потребителю. Тогда общая стоимость затрат на производство и транспортировку изделий будет равна

$$f=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}\cdot x_{ij}=4x_{11}+8x_{12}+\ldots+10\cdot x_{35} \qquad (1)$$

Поскольку суммарный объем вывезенной от каждого поставщика продукции не может превышать их объемов производства, то переменные x_{ij} должны удовлетворять следующим ограничениям

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=400 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=300 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=500 \end{cases} \qquad (2)$$

Объем суммарных поставок каждому потребителю от всех поставщиков должен удовлетворять его потребность, т. е.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=350 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=250 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=150 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=250 \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}=200 \end{cases} \qquad (3)$$

Объем перевозок продукции не может быть отрицательным числом, поэтому справедливы ограничения

$$x_{ij}\geq 0,\quad i=\overline{1,3},\quad j=\overline{1,5} \qquad (4)$$

Условия (1) - (4) и составляют математическую модель задачи.

Строим исходный опорный план по правилу “минимального элемента”. Заносим опорный план в таблицу:

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U
A_1	400	4 200	8	6	9	0 200	U_1=0
A_2	300	9	5 50 ⊕	10	4 250 ⊖	0	U_2=-3
A_3	500	7 150	11 200 ⊖	8 150	6 ⊕	10	U_3=3
	V	V_1=4	V_2=8	V_3=5	V_4=7	V_5=0	
	Потреб.	350	250	150	250	200	

Для определения потенциалов составляем уравнения для занятых клеток по формуле $U_i + V_j = C_{ij}$.

$U_1 + V_1 = 4$; $U_1 + V_5 = 0$; $U_2 + V_2 = 5$; $U_2 + V_4 = 4$;
$U_3 + V_1 = 7$; $U_3 + V_2 = 11$; $U_3 + V_3 = 8$;.

Полагая $U_1 = 0$, находим потенциалы и заносим их в таблицу.
Оцениваем свободные клетки по формуле $S_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$

$S_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 8 - (0 + 8) = 0$;
$S_{13} = 1$; $S_{14} = 2$; $S_{21} = 8$; $S_{23} = 8$; $S_{25} = 3$; $S_{34} = -4$; $S_{35} = 7$.

Видим, что $S_{34} < 0$ - перспективная клетка, ей соответствует минимальная отрицательная оценка свободной клетки. Строим для нее цикл в таблице. По циклу перемещается 200 единиц груза – минимальное количество груза, находящегося в узлах со знаком минус.

После пересчета получаем новую матрицу перевозок:

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U
A_1	400	4 200 ⊕	8	6	9	0 200 ⊖	U_1=0
A_2	300	9	5 250	10	4 50 ⊖	0 ⊕	U_2=1
A_3	500	7 150 ⊖	11	8 150	6 200 ⊕	10	U_3=3
	V	V_1=4	V_2=4	V_3=5	V_4=3	V_5=0	
	Потреб.	350	250	150	250	200	

Для определения потенциалов составляем уравнения для занятых клеток

$U_1 + V_1 = 4$; $U_1 + V_5 = 0$; $U_2 + V_2 = 5$; $U_2 + V_4 = 4$;
$U_3 + V_1 = 7$; $U_3 + V_3 = 8$; $U_3 + V_4 = 6$;.

Полагая $U_1 = 0$, находим потенциалы и заносим их в таблицу.

Вычисляем оценки свободных клеток.

$S_{12} = 4$; $S_{13} = 1$; $S_{14} = 6$; $S_{21} = 4$; $S_{23} = 4$; $S_{25} = -1$; $S_{32} = 4$; $S_{35} = 7$.

Видим, что $S_{25} < 0$ - перспективная клетка. Строим для нее цикл в таблице. По циклу перемещается 50 единиц груза – минимальное количество груза, находящегося в узлах со знаком минус.

После пересчета получаем новую матрицу перевозок:

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U
A_1	400	4 250	8	6	9	0 150	$U_1=0$
A_2	300	9	5 250	10	4	0 50	$U_2=0$
A_3	500	7 100	11	8 150	6 250	10	$U_3=3$
	V	$V_1=4$	$V_2=5$	$V_3=5$	$V_4=3$	$V_5=0$	
	Потреб.	350	250	150	250	200	

Для определения потенциалов составляем уравнения для занятых клеток

$U_1 + V_1 = 4$; $U_1 + V_5 = 0$; $U_2 + V_2 = 5$; $U_2 + V_5 = 0$;
$U_3 + V_1 = 7$; $U_3 + V_3 = 8$; $U_3 + V_4 = 6$;.

Полагая $U_1 = 0$, находим потенциалы и заносим их в таблицу.
Вычисляем оценки свободных клеток.

$S_{12} = 3$; $S_{13} = 1$; $S_{14} = 6$; $S_{21} = 5$; $S_{23} = 5$; $S_{24} = 1$; $S_{32} = 3$; $S_{35} = 7$.

Оценки всех свободных клеток положительны, следовательно полученный план перевозок продукции является оптимальным. Представим его в виде таблицы.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	250			
A_2		250		
A_3	100		150	250

Поскольку нет нулевых оценок свободных клеток, решение задачи единственное.

2) Минимальные суммарные затраты, соответствующие этой матрице, равны:

$$f_{min} = 250 \cdot 4 + 250 \cdot 5 + 100 \cdot 7 + 150 \cdot 8 + 250 \cdot 6 = 5650 \text{ ден. ед.}$$

3) Так как пятый потребитель - фиктивный, в пункте A_1 останутся не распределенными 150 единиц продукции, а в пункте A_2 - 50 единиц. Продукция пункта A_3 распределена полностью, что и требовалось по условию задачи.