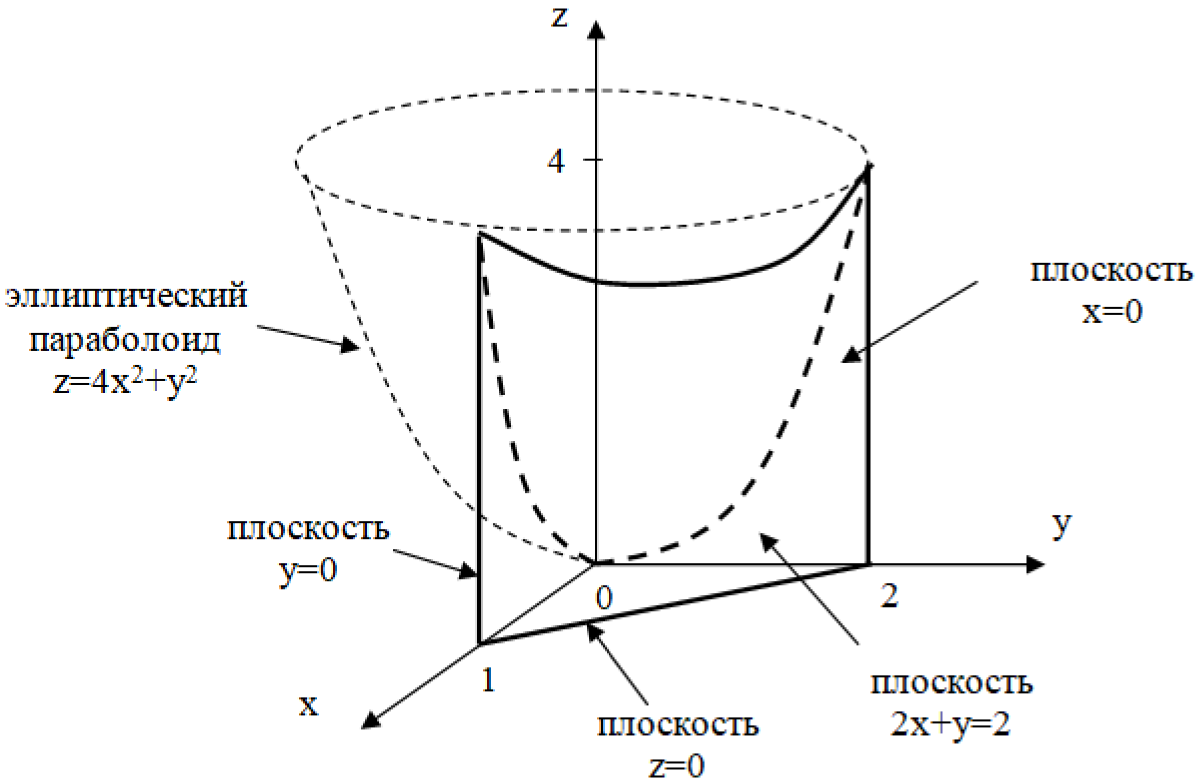
Задание

Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

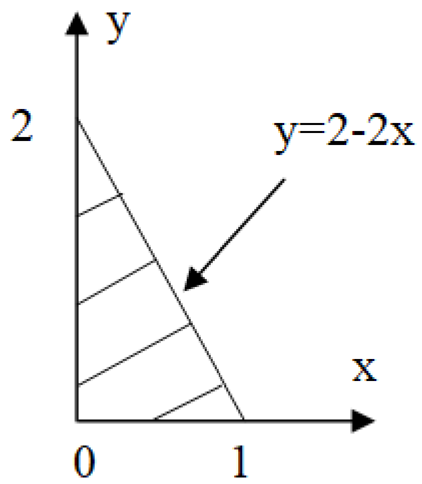
$$z = 4x^2 + y^2,\ 2x + y = 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$$

Решение.

Уравнение $z = 4x^2 + y^2$ описывает эллиптический параболоид с вершиной в точке $(0,0,0)$.
Уравнение $2x + y = 2$ описывает плоскость, проходящую через точки $(1,0,0)$ и $(0,2,0)$ параллельно оси z.
Плоскости $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ совпадают с координатными плоскостями.
Эскиз тела показан на рисунке



Проекция тела на плоскость xOy есть треугольник, изображенный на следующем рисунке



Объем тела вычисляется через тройной интеграл по формуле

$$V = \iiint\limits_V dxdydz$$

При описании тела $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2-2x,\ 0 \le z \le 4x^2+y^2$. Получаем при подстановке пределов интегрирования

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_0^{4x^2+y^2} dz =$$

Вычисляем внутренний интеграл по переменной z

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} z|_0^{4x^2+y^2} dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} (4x^2+y^2)dy =$$

Вычисляем интеграл по переменной y

$$= \int\limits_0^1 \left(4x^2y + \frac{y^3}{3}\right)|_0^{2-2x} dx = \int\limits_0^1 \left(4x^2(2-2x) + \frac{(2-2x)^3}{3}\right)dx = \int\limits_0^1 \left(-\frac{32}{3}x^3 + 16x^2 - 8x + \frac{8}{3}\right)dx =$$

Вычисляем последний интеграл по переменной x

$$= \left(-\frac{32}{3}\frac{x^4}{4} + 16\frac{x^3}{3} - 4x^2 + \frac{8}{3}x\right)|_0^1 = -\frac{32}{3}\frac{1^4}{4} + 16 \cdot \frac{1^3}{3} - 4 \cdot 1^2 + \frac{8}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $V = \frac{4}{3}$.